

液滴撞击弹性悬臂梁行为的全拉格朗日数值方法

蒋璇, 孙中国, 孙一颢, 刘启新, 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对以往研究容易忽略弹性壁面变形对液滴撞击壁面的影响,以及传统网格方法在模拟自由表面大变形、弹性体耦合上易出现网格畸变等问题,提出了耦合移动粒子半隐式法(MPS)与离散单元法(DEM)的全拉格朗日液滴-弹性体相互作用数值方法。基于该方法,模拟了跳板效应、液滴反弹和铺展、板变形和振动等非线性现象,并通过与实验或理论解的对比,验证了方法的准确性。进一步探究了液滴撞击悬臂薄板的动态过程,分析了撞击速度和角度对液滴与薄板相互作用的影响。数值结果表明:悬臂梁末端最大偏移量随法向撞击速度呈线性增加,当液滴撞击角度 $\theta \geq 90^\circ$ 时,接触时间随撞击角度的增加呈现先减小后增大然后再减小的趋势,当撞击角度 $\theta < 90^\circ$ 时,接触时间随撞击角度的增加呈现先增大后减小的趋势;液滴重心投影点的位置是影响液滴铺展系数与悬臂梁最大偏移量的主要因素,法向韦伯数相同的情况下, $\theta \geq 90^\circ$ 时的液滴铺展系数始终大于 $\theta < 90^\circ$ 的,而 $\theta < 90^\circ$ 时的悬臂梁最大偏移量始终大于 $\theta \geq 90^\circ$ 的。该研究加深了对液滴撞击动力学的理解,可为涂层工艺和液滴传感技术等提供参考。

关键词: 移动粒子半隐式法;离散单元法;液滴;弹性体

中图分类号: O353.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202412010 **文章编号:** 0253-987X(2024)12-0099-12

Fully Lagrangian Numerical Method for the Behavior of Droplet Impact on Elastic Cantilever Beams

JIANG Xuan, SUN Zhongguo, SUN Yijie, LIU Qixin, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Given that the influence of elastic substrate deformation on the impact of droplets on the substrate has tended to be overlooked in previous studies and the traditional mesh method is susceptible to mesh distortion in simulating large deformations of free surfaces and the coupling of elastic bodies, a fully Lagrangian numerical method for droplet-elastic body interaction is proposed, combining the moving particle semi-implicit (MPS) method with the discrete element method (DEM). Through this method, nonlinear phenomena such as the springboard effect, droplet rebound and spreading, plate deformation, and vibration are simulated. The accuracy of the method is validated through comparisons with experimental or theoretical results. Additionally, an in-depth analysis of the dynamic process of droplet impact on a cantilevered thin plate is conducted, focusing on the influence of impact velocity and angle on the interaction between the droplet and the thin plate. Numerical results indicate that the maximum deflection at

收稿日期: 2024-03-05。 作者简介: 蒋璇(2000—),女,硕士生;孙中国(通信作者),男,教授,博士生导师。

基金

项目:国家自然科学基金资助项目(51922085)。

网络出版时间: 2024-04-24

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.t.20240423.0850.002>

the end of the cantilever beam linearly increases with the normal impact velocity. When the droplet impact angle θ is greater than 90° , the contact time initially decreases, then increases, and eventually decreases as the impact angle increases. Conversely, when the impact angle θ is less than 90° , the contact time initially increases and then decreases as the impact angle increases. The spreading coefficient of the droplet and the maximum deflection of the cantilever beam are predominantly influenced by the position of the droplet's center of mass projection. Under the same normal Weber number conditions, the droplet spreading coefficient is always greater for $\theta \geq 90^\circ$ than for $\theta < 90^\circ$, and the maximum deflection of the cantilever beam is always greater for $\theta < 90^\circ$ than for $\theta \geq 90^\circ$. This study enhances the understanding of droplet impact dynamics and can provide insights for coating processes, droplet sensing technology, and other related fields.

Keywords: moving particle semi-implicit method; discrete element method; droplet; elastic body

超疏水表面上的液滴弹跳现象广泛存在于风力机叶片^[1]、飞机机翼防冰^[2]、表面自清洁^[3]、喷墨印刷^[4]和金属淬火^[5]等各种工程实际中,大部分相关研究将壁面假设为刚性,暂未考虑壁面变形。实际上,液滴撞击弹性表面与撞击刚性表面呈现的动态行为截然不同。针对雨滴撞击无人机螺旋桨叶片^[6]、农药喷洒在植物叶片^[7]、雨滴撞击昆虫翅膀^[8]、水滴滴在能量收集器表面^[9]等情况,液滴变形的同时会将动量传递给弹性壁面,使其出现变形甚至振动,这又反过来影响液滴运动。液滴撞击弹性壁面是一个表面张力对液滴行为起重要控制作用的双向流固耦合问题,相关机理研究可为生物、农业、航空航天等多个领域的发展提供支撑。

Vasileiou 等^[10]通过建模和实验,研究了基材的刚度、面密度和阻尼等参数对液滴撞击接触时间的影响。Gart 等^[11]基于动量平衡和简单悬臂梁理论建立分析模型,研究了具有不同结构特性和润湿性的悬臂梁对雨滴撞击的弹性响应。Upadhyay 等^[12]通过实验和理论建模,研究了不同韦伯数与刚度下液滴弹跳和悬臂震荡的相互关系。然而,液滴撞击弹性体是一个复杂的非线性问题,对于更为复杂的弹性基板结构,建立分析模型变得异常困难,精确控制实验中的影响因素也十分具有挑战性,因此数值模拟有望成为解决这一难题的有效途径。

现有研究中,通常假设液滴是垂直撞击固体壁面。但在实际工程中,液滴往往会以其他角度与壁面发生接触,如液滴自由下落并与移动的表面或倾斜的表面发生撞击。前人的研究大多集中在刚性壁面,对于液滴倾斜撞击弹性壁面的研究却鲜有涉及。Antonini 等^[13]通过实验研究了倾斜的超疏水刚性表面对液滴接触时间的影响。Aboud 等^[14]针对液

滴倾斜撞击刚性壁面的飞溅阈值进行了一系列的研究。Yin 等^[15]用格子玻尔兹曼法研究了微结构超疏水表面上液滴的倾斜撞击。由于液滴倾斜撞击弹性壁面物理过程复杂及固液界面难以捕捉,鲜有合适的数值方法能对液滴倾斜撞击弹性超疏水壁面进行模拟。

传统基于网格的计算流体动力学(CFD)方法,如水平集法^[16]、流体体积法^[17]、前沿跟踪法^[18]等,在模拟液滴撞击固体壁面的两相耦合问题时,均是将计算域离散为固定的欧拉网格,并对界面进行跟踪与重构。当液滴撞击弹性壁面时,液滴的破碎变形会使得流体界面难以确定,传统的网格方法无法对其进行准确模拟。此外,弹性壁面的显著偏转也会使固液界面难以追踪。因此,传统网格方法需要耦合其他方法共同来描述运动边界^[16],但复杂的耦合和接口处理算法可能会导致计算效率低和收敛性差^[19]等问题。然而,无网格法在处理此类自由表面大变形问题时具有天然优势。粒子法的拉格朗日特性有助于规避传统网格方法中的网格畸变问题,拉格朗日框架还能够避免 N-S 方程中对流项的空间离散化,有效防止数值扩散。同时,易于捕捉各类界面的特性使其在多相问题模拟中具有广泛适用性。

本文将移动粒子半隐式法(MPS)与离散单元法(DEM)耦合后加入表面张力模型,针对液滴撞击弹性梁的流固耦合问题进行建模,采用 MPS 算法求解流体域,DEM 算法求解固体域,表面张力浸润模型模拟液滴在弹性表面的浸润,构建的全拉格朗日模型可以更好地模拟液滴弹跳及弹性壁面变形等问题。首先,介绍 MPS 及 DEM 算法模型的控制方程以及对液滴行为起重要作用的表面张力模型;其次,通过液滴在平面上的铺展、悬臂梁在初始速度场

下的变形以及液滴撞击超疏水悬臂梁 3 个算例,验证了本文模型的准确性;最后,分析液滴撞击速度和撞击角度对液滴行为和悬臂梁变形的影响。

1 数值算法及模型

1.1 移动粒子半隐式(MPS)法

本文中,液滴部分采用移动粒子半隐式(MPS)法模拟,此算法将流体域离散为一定数量的粒子,这些粒子携带流体的属性和流动的物理信息。MPS 法的控制方程包括不可压缩连续方程和不可压缩 N-S 方程,分别写为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为速度矢量; t 为时间; ρ 为流体密度; p 为压力; ν 为运动黏度; $\mathbf{f}$ 为体积力矢量。

MPS 方法将核函数作为权函数衡量粒子间相互作用,用以建立粒子间的相互作用模型。核函数^[20]采用反比例形式,表示如下

$$w_{ij}(r_{ij}) = \begin{cases} \frac{r_e}{r_{ij}} - 1, & r_{ij} < r_e \\ 0, & r_{ij} \geq r_e \end{cases} \quad (3)$$

式中: $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ 为粒子 i, j 之间的距离,其中 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_j$ 分别为粒子 i, j 的位置矢量; r_e 为粒子影响半径。

粒子 i, j 在 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_j$ 位置处所携带物理量 φ_i, φ_j 之间的梯度可表示为 $(\varphi_j - \varphi_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2$, 将粒子 i 和邻近粒子 j 之间的梯度向量用核函数加权求平均,得到粒子 i 处的梯度向量

$$\langle \nabla \varphi \rangle_i = \frac{d}{n_0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\varphi_j - \varphi_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) w_{ij} \right] \quad (4)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 为取平均值运算; d 为计算维度,取为 2; n_0 为初始粒子数密度; φ 为标量物理量,如压力等。

粒子数密度 n 定义为

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w_{ij} \quad (5)$$

将高斯函数作为扩散方程的解析解,推导出 Laplace 算子的表达式

$$\langle \nabla^2 \varphi \rangle_i = \frac{2d}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} [(\varphi_j - \varphi_i) w_{ij}] \quad (6)$$

式中: λ 为补偿系数。

散度算子的表达式可写为

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle_i = \frac{d}{n_0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\boldsymbol{\varphi}_j - \boldsymbol{\varphi}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) w_{ij} \right] \quad (7)$$

式中: $\boldsymbol{\varphi}$ 为矢量物理量,如速度等。

MPS 是一种半隐式方法,在求解控制方程的过程中,首先基于已知信息显式求得中间速度,再通过泊松方程隐式求得压力,最后对中间速度进行修正,获取下一个时间步计算所需的信息。本文采用改进后的压力泊松方程^[21],表达式如下

$$\langle \nabla^2 p^{k+1} \rangle_i = (1 - \gamma) \frac{\rho}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^k \rangle_i - n_0}{n_0} \quad (8)$$

式中: p^{k+1} 为第 $k+1$ 时间步的压力; $\langle n^k \rangle_i$ 为粒子 i 在第 k 时间步的粒子数密度; Δt 为时间步长; γ 为混合系数,取值应在改善压力振荡的同时保持流体体积守恒,推荐取为 $[0.01, 0.05]$,本文取 0.05。

表面粒子误判会引起泊松方程计算过程中压力求解病态,从而导致计算崩溃,因此本文引入无表面粒子判定技术(NSD)^[22],通过引入虚拟粒子补偿粒子数密度缺失,避免了表面粒子的判断。新的粒子数密度定义为

$$\langle n' \rangle_i = n_0 + \sum_{i,j}^{N_r} [\omega(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) - \omega(l_0)] \quad (9)$$

式中: N_r 为粒子 i 在 NSD 技术搜索范围内的邻近粒子数; $\langle n' \rangle_i$ 为补足后的粒子数密度; l_0 为粒子间距。

考虑到粒子挤压时的额外补足值,对式(9)修正后得到

$$\langle n'' \rangle_i = \max(\langle n \rangle_i, \langle n' \rangle_i) \quad (10)$$

式中: $\langle n'' \rangle_i$ 为修正后补足的粒子数密度; $\langle n \rangle_i$ 为原始粒子数密度。

1.2 离散单元(DEM)法

离散单元法是由 Cundall 和 Potyondy^[23]提出的用于模拟结构力学行为的拉格朗日方法,其采用显示求解格式,将固体域离散化为一堆粒子,无固定拓扑关系。采用 DEM 法求解固体运动的控制方程如下

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_{ss} + \mathbf{f}_{ls} + \mathbf{f}_e \quad (11)$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M}_{ss} + \mathbf{M}_{ls} + \mathbf{M}_e \quad (12)$$

式中: m 为固体粒子的质量; $\mathbf{f}_{ss}, \mathbf{f}_{ls}$ 分别为固体粒子间的作用力以及流体粒子对固体粒子的作用力; $\mathbf{f}_e$ 为其他外力,如重力等; I 为转动惯量; $\boldsymbol{\omega}$ 为固体旋转角速度; $\mathbf{M}_{ss}, \mathbf{M}_{ls}$ 分别为固体粒子间的力矩以及流体粒子对固体粒子的力矩; $\mathbf{M}_e$ 为其他外力矩。

MPS-DEM 双向流固耦合模型通过压力实现流体与固体之间运动的传递。流体粒子对固体粒子的作用力与固体对流体的作用力是一对相互作用力,两者数值相等方向相反。 $\mathbf{f}_{ls}$ 和 $\mathbf{M}_{ls}$ 分别可写为

$$\mathbf{f}_{ls} = - \sum_{i=1}^N (\langle \nabla p \rangle_i l_0^2) \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{ls} = - \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{ral} \times \langle \nabla p \rangle_i) l_0^2 \quad (14)$$

式中: N 为流体粒子总个数; $\mathbf{r}_{ral}$ 为相对质心的位置矢量。

在 DEM 方法中, 固体粒子间的作用力可通过接触模型和粒子连接模型共同计算, 受力公式写为

$$\mathbf{f}_{ss} = \sum_{a \neq b} \mathbf{f}_{ab} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{f}_{ab}$ 为固体粒子 a 、 b 之间的接触力。

当两个固体粒子 a 、 b 相互挤压时, 会在接触面产生沿法向和切向的位移, 挤压产生的接触力由刚性力、阻尼力、摩擦力构成, 如图 1 所示。

接触力的计算公式^[24]如下

$$\mathbf{f}_{ab} = \mathbf{f}_{ab,n} + \mathbf{f}_{ab,t} \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_{ab,n} = \begin{cases} -k_n \delta_n \mathbf{n} - \zeta_n \mathbf{u}_n, & \delta_n > 0 \\ 0, & \delta_n \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\mathbf{f}_{ab,t} = \begin{cases} -k_t \delta_t \mathbf{t} - \zeta_t \mathbf{u}_t, & |\mathbf{f}_{ab,t}| < \mu_f |\mathbf{f}_{ab,n}| \\ -\mu_f |\mathbf{f}_{ab,n}| \mathbf{u}_t / |\mathbf{u}_t|, & |\mathbf{f}_{ab,t}| \geq \mu_f |\mathbf{f}_{ab,n}| \end{cases} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{f}_{ab,n}$ 、 $\mathbf{f}_{ab,t}$ 分别为粒子 a 、 b 间的法向与切向接触力; μ_f 为滑动摩擦系数; k 、 ζ 分别为刚度系数和阻尼系数; δ 为挤压位移; $\mathbf{u}$ 为速度矢量; 下标 n 、 t 分别表示法向和切向; $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{t}$ 分别为法向和切向向量。

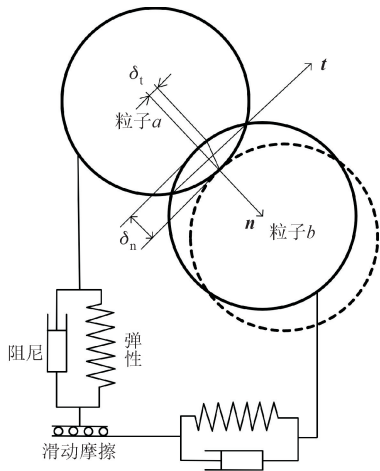


图1 接触模型示意图

Fig. 1 Schematic view of the contact model

接触模型主要用于模拟散体颗粒间的排斥力, 以防止粒子重叠。然而, 在模拟结构体时, 接触模型无法描述结构体内部固体粒子间的连接力, 因此需要引入粒子连接模型, 包括粒子-粒子接触连接模型和平行键连接模型^[25]。

粒子-粒子接触连接模型对粒子间径向距离起约束作用, 在该模型中假设两个固体粒子 a 、 b 之间存在一个约束固体粒子距离的梁, 其长和高均为 L , 宽为 t , $L = R_a + R_b$, R_a 、 R_b 分别为粒子 a 和 b 的半径, 则固体粒子 a 、 b 之间的接触体积为 $L \times L \times t$, 二维情况下 $t = 1$ 。根据梁理论, 粒子-粒子接触连接模型刚度系数的计算公式可写为

$$k_n = \frac{AE}{L} = \frac{tLE}{L} = Et \quad (19)$$

式中: E 为固体粒子的弹性模量; A 为固体粒子间的接触面积。

平行键模型对粒子间转动起约束作用, 在该模型中假设两个固体粒子 a 、 b 之间存在一个抵抗固体粒子间转动的梁, 其长为 L , 高为 $2\bar{R}$, 宽为 t , $\bar{R} = R_a R_b / (R_a + R_b)$, 则固体粒子 a 、 b 之间的接触体积为 $L \times 2\bar{R} \times t$ 。根据梁理论, 平行键模型刚度系数的计算公式可写为

$$\bar{k}_n = \frac{E}{R_a + R_b} \quad (20)$$

1.3 表面张力模型原理

液滴撞击弹性表面涉及铺展、弹跳和飞溅等复杂行为, 因此需要稳定且有效的表面张力模型。本文采用表面自由能表面张力模型^[26], 通过求解粒子间的势能, 将表面张力转换为体积力进行计算, 不仅鲁棒性高, 且在亲/疏水问题研究上具有算法简洁、精度较高等优势^[27]。粒子间的作用力可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}_{ij} \quad (21)$$

式中: $\mathbf{F}$ 为粒子间的作用力矢量; E_p 为粒子间的势能; $\mathbf{r}$ 为两个粒子间的距离; $\mathbf{n}_{ij}$ 为两个粒子间的单位方向矢量。

两个粒子间的作用力需要满足短程排斥、长程吸引的要求, 则势能公式定义为

$$E_p(r) = \begin{cases} \frac{1}{3} C' \left(r - \frac{3}{2} l_{\min} + \frac{1}{2} R \right) (r - R)^2, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases} \quad (22)$$

式中: C' 为修正系数; $l_{\min}$ 为斥力和引力的分界位置, 即表面自由能的极值点; R 为表面自由能模型粒子的影响域。 R 和 $l_{\min}$ 是影响表面张力的关键参数, 参考文献^[28], 本文取 $l_{\min} = 1.5 l_0$, $R = 3.1 l_0$ 。

流体与壁面的固-液接触角是在表面自由能模型的基础上, 通过计算流体粒子的受力自动生成。势能函数定义了不同粒子的势能, 并通过不同的修正参数 C' 来区别不同物质的表面张力。其中, 流体

粒子间的修正参数 C_s ^[26] 可根据流体物性求得,流体粒子与固体壁面粒子间的修正参数 C_f 的计算公式可写为

$$C_f = \frac{C_s}{2}(1 + \cos \Psi)$$

(23)

式中: Ψ 为液滴接触角,即壁面与液滴外轮廓切线的夹角。

2 模型验证

2.1 液滴在平板上浸润过程模拟

采用表面自由能表面张力模型描述液滴在平板上的浸润,分别对亲/疏水状况下的浸润现象进行模拟。预设液滴与刚性平板的理论接触角分别为 60° 和 150° ,采用直径为 2.80 mm 的圆形液滴,其初始粒子间距为 0.05 mm,密度为 $1\,000\text{ kg/m}^3$,运动黏度为 $1\times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$,表面张力系数为 0.072 N/m 。

在表面张力及固液浸润作用下,液滴发生变形的过程如图 2 所示。表 1 给出了液滴接触角理论值与模拟值的对比。由图 2 和表 1 可见,液滴浸润亲/疏水壁面的过程均符合物理基本原理,且模拟稳定后的液滴接触角与理论值的误差均在 3% 以内,表明本文所用表面张力模型和固液接触模型的正确性。

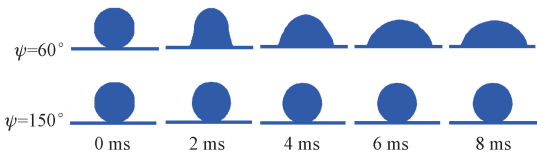


图 2 液滴浸润时间序列图

Fig. 2 Time series of droplet wetting

表 1 液滴接触角的理论值与模拟值对比
Table 1 Theoretical and simulated comparison of droplet contact angles

接触角/(°)		相对误差/%
理论值	模拟值	
60	61.36	2.26
150	150.04	0.02

2.2 悬臂梁在初始速度场下的变形

为了验证离散单元法在处理弹性固体大变形时的准确性,对弹性悬臂梁的振荡变形进行模拟。图 3 给出了弹性悬臂梁的示意图,悬臂梁长度 L_b 为 0.20 m,宽 H 为 0.02 m,材料的体积和剪切模量分别为 3.25×10^6 、 $7.15\times 10^6\text{ N/m}^2$ 。

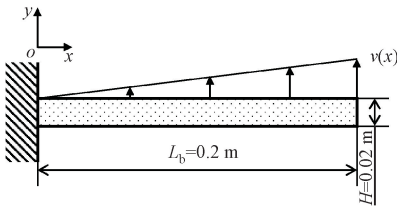


图 3 悬臂梁算例示意图

Fig. 3 Schematic view of cantilever beam tests

在悬臂梁的自由端施加一个初始速度 $v(x)$,另一端固定于墙壁,统计悬臂梁末端位移随时间的变化。初始时刻,悬臂梁整体的速度场^[29]如下

$$v(x) = \beta c \left[\frac{(\sin k_w L_b + \sinh k_w L_b)(\cos k_w x - \cosh k_w x)}{2(\cos k_w L_b \sinh k_w L_b - \sin k_w L_b \cosh k_w L_b)} - \frac{(\cos k_w L_b + \cosh k_w L_b)(\sin k_w x - \sinh k_w x)}{2(\cos k_w L_b \sinh k_w L_b - \sin k_w L_b \cosh k_w L_b)} \right]$$

(24)

式中: v 为 y 方向的运动速度; β 为速度增幅系数,取为 0.01; c 为声速; k_w 为波数,取 $k_w L_b = 1.875$ 。

观察发现,悬臂梁自由端在初始速度场的作用下发生类似周期运动的无衰减振荡。将悬臂梁末端振动生成曲线的振动周期与振幅分别除以悬臂梁长度,可得到无量纲振动周期和振幅。表 2 给出了本文模拟结果与理论解及其他模拟结果的对比。可以看出,本文结果与理论解基本一致。

表 2 悬臂梁振动模拟结果与解析解及其他模拟结果的对比

Table 2 Comparison of cantilever vibration simulation results with analytical solutions and results from other studies

方法	无量纲振动周期	无量纲振幅
理论解	72.39	0.115
本文	72.70	0.115
Hwang 等 ^[30]	72.40	0.113
Rafiee 和 Thiagarajan ^[29]	82.20	0.126
Antoci 等 ^[31]	81.50	0.126
Gray 等 ^[32]	82.00	0.125

将监测到的悬臂梁自由端位移变化与解析解进行对比,得到的结果如图 4 所示。由图可见,本文采用 DEM 法模拟的结果与理论解吻合较好,验证了模型的准确性。

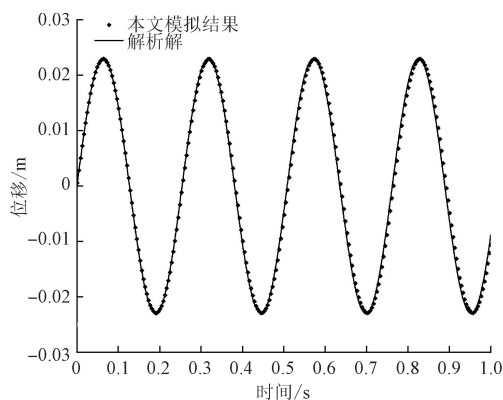


图 4 悬臂梁末端位移模拟结果与解析解的对比

Fig. 4 Comparison between simulation results and analytical solutions of displacement at the end of the cantilever beam

2.3 液滴撞击不同长度超疏水悬臂梁

液滴撞击刚性壁面时,会经历铺展-回缩-反弹等过程,液滴能量实现动能-表面能-动能的转变。但在液滴撞击弹性表面时,能量的转换与撞击刚性表面有所不同,壁面的变形会产生一种新的能量转换机制,即液滴与弹性壁面的动能-弹性能转换机制^[33]。已有研究表明:液滴从弹性表面反弹后,悬臂梁将会进入自由振动状态,以第一模态或固有频率进行振动。出现这种现象的原因可能是与恢复力相比,液滴的冲击力较小,导致梁只在自然模式下受到激励。振动过程可用一阶振动频率^[19]描述为

$$f_b = \frac{3.52}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m_b L_b^3 (1 - \mu^2)}} \quad (25)$$

式中: f_b 为悬臂梁的振动频率; m_b 为悬臂梁的质量; μ 为泊松比。由此,梁的振荡周期可写为 $\tau_b = 1/f_b$ 。

采用 MPS-DEM 模型对液滴撞击不同长度(8、10、12、15、18、20 mm)悬臂梁的过程进行模拟,悬臂梁厚度为 0.25 mm,液滴的撞击速度为 0.8 m/s。将数值模拟得到的悬臂梁末端位移随时间的变化曲线通过快速傅里叶变换转换到频率域,如图 5 所示。可以看到,悬臂梁末端位移振幅谱中曲线的波峰尤为明显,表明在液滴撞击悬臂梁的过程中,悬臂梁将以最大振幅处频率发生振动。此外,当悬臂梁长度增加时,其振动频率会呈现减小趋势。

从振幅谱中提取不同长度悬臂梁对应的主频率 f ,通过 $\tau = 1/f$ 计算悬臂梁的振荡周期,并与理论解和基于光滑粒子流体动力学方法 (SPH) 的结果^[19]进行对比,如图 6 所示。可以看出,采用 MPS-DEM 模型计算得到的振动周期与理论结果更吻合。

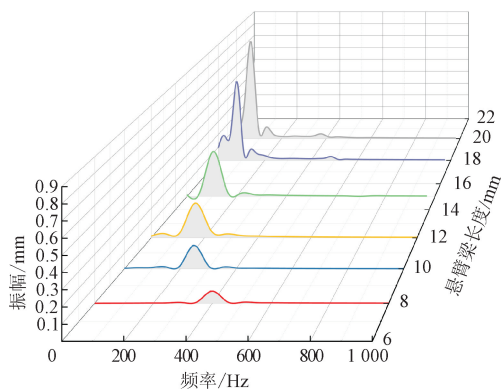


图 5 悬臂梁末端位移振幅谱

Fig. 5 Amplitude spectrum of end displacement of the cantilever beam

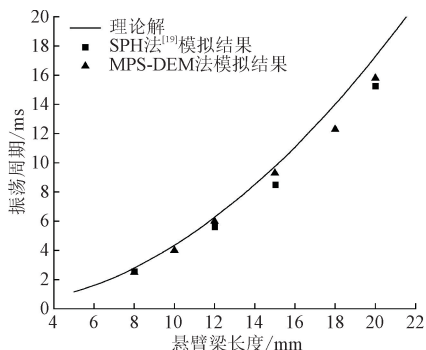


图 6 悬臂梁末端振荡周期 MPS-DEM 法模拟结果与理论解及 SPH 法结果的对比

Fig. 6 Comparison of MPS-DEM simulation results with theory solutions and SPH results for the end vibration period of the cantilever beam

3 算例与结果分析

本节采用 MPS-DEM 法,对液滴以不同的速度和角度撞击悬臂梁末端的动态行为进行研究。接触时间是表征超疏水表面非润湿性能的重要参数,是研究防结冰等问题关键参数^[1]。本文中,接触时间定义为液滴第一次接触壁面到弹起离开壁面的持续时间。

本节算例中,液滴与悬臂梁均由粒子离散,设置粒子间的初始距离为 0.05 mm,液滴的初始直径为 2.80 mm,密度为 1 000 kg/m³,表面张力系数为 0.072 N/m。如无特别说明,悬臂梁的尺寸为 15 mm × 0.5 mm,密度为 5 000 kg/m³,弹性模量为 3 × 10⁸ N/m²,泊松比为 0.3。定义液滴重心投影点为液滴重心沿速度方向在悬臂梁上的投影,初始撞击点在距悬臂梁末端 5 mm 处,算例示意图如图 7 所示,其中 θ 为液滴撞击角, V 为液滴速度, V_t 、 V_n 分别

为液滴的切向和法向速度。

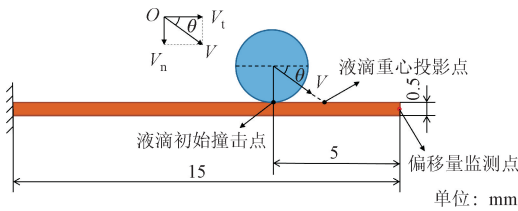


图 7 液滴撞击弹性悬臂梁示意图

Fig. 7 Schematic view of drop impact on elastic cantilever

通过平衡液滴的惯性力和毛细管力,得到液滴撞击刚性超疏水壁面的理论接触时间^[34]为

$$\tau_c \approx \sqrt{\rho D_0^3 / \sigma}$$
 (26)

式中: ρ 、 D_0 分别为液滴的密度和初始直径; σ 为表面张力系数。

3.1 液滴以不同速度撞击悬臂梁

为了分析不同撞击速度对液滴和悬臂梁变形的影响,保持液滴直径不变,设置撞击速度 V 分别为 1.4、1.3、1.2、1.1、1.0、0.9、0.8 m/s,撞击角度 θ 为 90° 。

图 8 给出了液滴撞击悬臂梁随时间的变化过程。由图可见,当 $t=0$ 时,液滴第一次接触悬臂梁表面。在 $t=0\sim3$ ms 过程中,液滴在悬臂梁表面开始铺展,液滴动能开始转化为表面能。与此同时,液滴撞击弹性壁面也会对壁面产生作用力,使其发生振荡,此时一部分液滴动能将转化为悬臂梁的弹性能。在 3 ms 时,悬臂梁达到最低位置,液滴的铺展直径也达到最大,液滴动能完全转化为液滴的表面能和悬臂梁的弹性能。在 $t=3\sim7.5$ ms 的过程中,悬臂梁向上移动将动量传递给液滴,液滴的表面能也转化为动能。壁面向上运动决定了接触时间的长

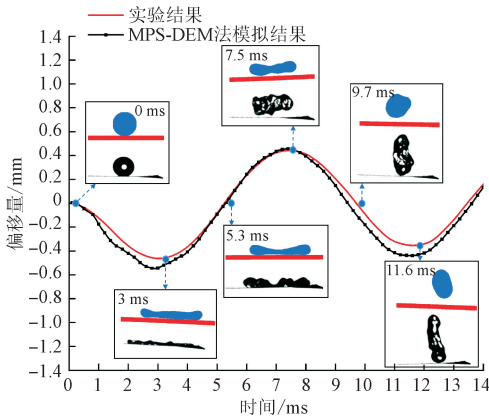


图 8 悬臂梁末端偏移量随时间的变化

Fig. 8 Variation of end displacement of the cantilever beam with time

短,当 $t=7.5$ ms 时,悬臂梁末端上升到最高位置,液滴以煎饼状提前离开悬臂梁表面,即悬臂梁传递给液滴的垂直动量使液滴在完全缩回前离开表面,使得接触时间较刚性表面缩短了 57%,这种弹性壁面使液滴接触时间减小的早期起跳机制被称之为“跳板效应”^[33]。在 $t=7.5\sim11.6$ ms 的过程中,液滴与悬臂梁分离,悬臂梁开始向下移动,而液滴在表面张力的作用下继续缩回,呈明显的棒状形貌。通过与液滴撞击速度为 1.4 m/s 的实验结果^[12]进行对比,发现液滴行为和悬臂梁末端位移的模拟结果与实验结果吻合良好。

悬臂梁末端位移的变形量是研究雨滴能量收集器的关键参数^[9]。图 9 给出了不同撞击速度下,悬臂梁末端偏移量随时间的变化曲线。由图可见,前期液滴撞击悬臂梁时,在液滴铺展变形和表面张力的共同作用下,悬臂梁末端偏移量随时间呈不规则波动。当液滴反弹离开悬臂梁后,悬臂梁进入自由振动状态,末端偏移量随时间按固有频率规律运动。除此之外,不同撞击速度下悬臂梁的振动频率基本保持不变。

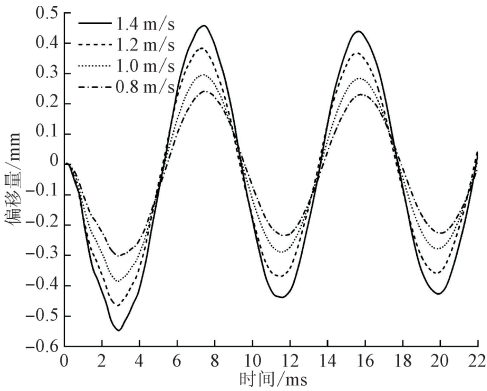


图 9 不同撞击速度下悬臂梁末端偏移量随时间的变化

Fig. 9 Variation of end displacement of the cantilever beam with time under different impact velocities

悬臂梁的变形与液滴冲击力的大小有关,冲击力取决于液滴的惯性参数,包括液滴直径和撞击速度^[35]。图 10 给出了悬臂梁最大偏移量 $\delta_{\max}$ 随速度的变化曲线。观察可得,悬臂梁的最大偏移量与液滴撞击速度呈明显的线性关系。

3.2 液滴以不同角度撞击悬臂梁

悬臂梁的变形取决于液滴的动量传递,因此在本节的数值模拟过程中,保持液滴总动量不变,令液滴以 1.4 m/s 的绝对速度撞击弹性壁面。之前的研究工作大多局限于液滴锐角撞击刚性壁面,但对于弹性壁面来说,壁面变形会影响液滴与壁面的运动

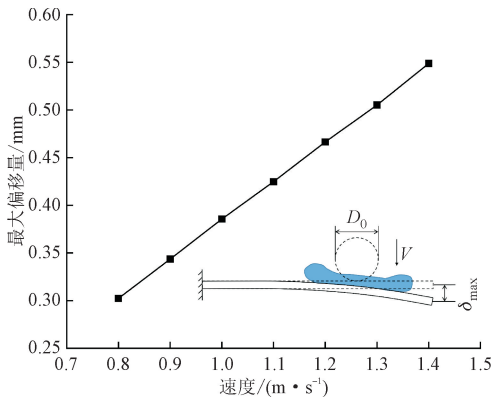


图 10 悬臂梁最大偏移量随撞击速度的变化

Fig. 10 Variation of maximum displacement of the cantilever beam with impact velocity

状态,导致钝角与锐角撞击呈现不同的运动规律。为了研究不同撞击角度对液滴和悬臂梁运动的影响,

设置液滴撞击角度 θ 为 20° 、 30° 、 45° 、 60° 、 70° 、 80° 、 90° 、 100° 、 110° 、 120° 、 135° 、 150° 和 160° 。

液滴撞击弹性超疏水壁面包括铺展和回缩 2 个过程。当液滴倾斜撞击弹性表面时,液滴的形状会扭曲,且相对于撞击点发生不对称的铺展。本文通过大量模拟发现:液滴斜撞弹性壁面也会出现与文献[15]中刚性壁面相似类型的弹跳。图 11 给出了液滴以 3 种角度撞击弹性悬臂梁时,发生的不同类型弹跳的示意图。由图可见,当 $\theta=120^\circ$ 时,液滴发生煎饼弹跳,并以煎饼状迅速离开弹性壁面,接触时间最短。当 $\theta=135^\circ$ 时,液滴在完全回缩到与表面点接触前反弹,发生不完全回缩弹跳,相较于完全回缩弹跳,接触时间较小。当 $\theta=150^\circ$ 时,液滴在回缩到与壁面点接触时离开壁面,发生完全回缩弹跳,接触时间最长。

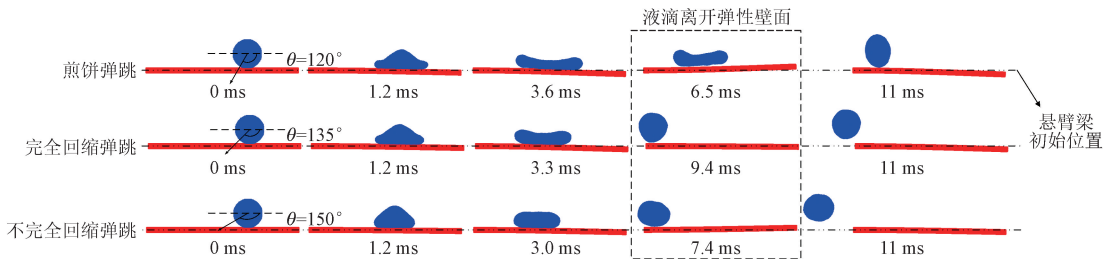


图 11 液滴以不同角度撞击弹性悬臂梁时的不同类型弹跳

Fig. 11 Different types of bounces of droplets impacting elastic cantilever beams at various angles

图 12 展示了液滴以不同角度撞击悬臂梁的接触时间。可以看出,液滴的接触时间随撞击角度非单调变化。当 $\theta \geq 90^\circ$ 时,接触时间呈先减小再增加然后再减小趋势。当 $\theta=100^\circ \sim 120^\circ$ 时,液滴发生煎饼弹跳,接触时间大幅减小,尤其是 $\theta=120^\circ$ 时,相对于刚性壁面,接触时间减小了近 60%。

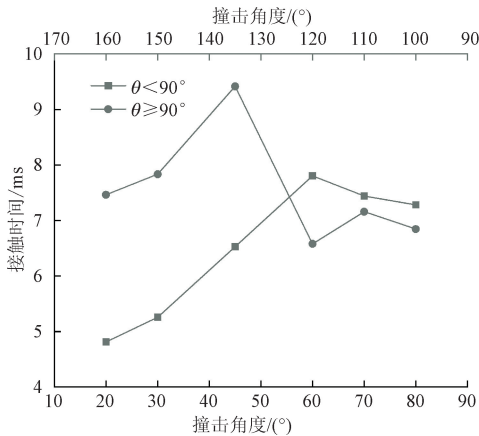


图 12 不同角度撞击悬臂梁末端时液滴的接触时间

Fig. 12 Contact time of droplets impacting the end of cantilever beam at different angles

定义法向韦伯数如下

$$We_n^* = \rho(V \sin \theta)^2 D_0 / \sigma \quad (27)$$

绘制液滴的动能变化曲线如图 13 所示。由图可见,当 $\theta > 90^\circ$ 时,随着液滴撞击角度增加, We_n^* 减小,液滴稳定飞离壁面时的剩余动能越大。当 $\theta=135^\circ \sim 160^\circ$ 时,由于切向速度的存在,液滴会向悬臂梁固定端移动,此时悬臂梁变形量较小,液滴回弹能

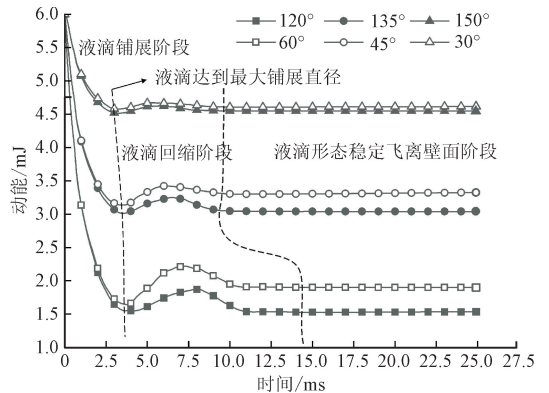


图 13 液滴动能随时间的变化

Fig. 13 Variation of kinetic energy of the liquid droplet with time

量明显更高,悬臂梁无法追上液滴以增加其接触时间,导致液滴接触时间随撞击角度的增加而变小。

图 14 给出了撞击角度分别为 60° 、 80° 时,液滴撞击悬臂梁的演变过程。由图可见,当 $\theta=60^\circ$ 时,在液滴的运动过程中,其水平方向的速度分量导致液滴在铺展阶段朝向悬臂梁的自由端移动。当液滴进入回缩升空阶段时,液滴开始向上运动并与表面逐渐分离。同时,悬臂梁也开始向上运动,且其自由端

相较于近固定端会呈现出更大幅度的上升。这一现象导致了液滴从表面脱落的延迟,从而增加了液滴与表面的接触时间。当 $\theta=80^\circ$ 时,液滴发生不完全回缩反弹,液滴离开弹性壁面时处于回缩过程,液滴重心沿速度方向在悬臂梁上的投影点相对于初始撞击点偏移量较小,悬臂梁向上运动传递的动能以及液滴表面能转换的动能促使其在未完全回缩前离开弹性壁面,导致液滴的接触时间较小。

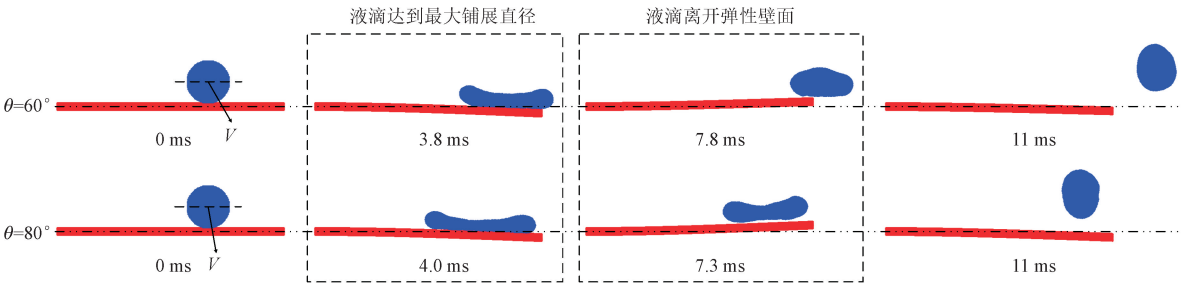


图 14 $\theta=60^\circ$ 与 $\theta=80^\circ$ 时液滴撞击悬臂梁的形态演变

Fig. 14 Morphological evolution of the droplet hitting the cantilever at $\theta=80^\circ$ and $\theta=60^\circ$

工程实际中,液滴的铺展系数是影响喷墨打印质量和精度的关键参数^[4]。液滴铺展系数的计算公式可写为

$$\beta = D_{\max}/D_0 \tag{28}$$

式中: $D_{\max}$ 为液滴铺展最大直径。

图 15 给出了法向韦伯数与液滴铺展系数的关系曲线。由图可见,铺展系数与法向韦伯数成正比,随着法向韦伯数增加,铺展系数也随之线性增加。法向韦伯数相同时,液滴在 $\theta\geq 90^\circ$ 时的铺展系数大于 $\theta<90^\circ$ 的。根据图 13,在相同的法向韦伯数下,液滴在 $\theta\geq 90^\circ$ 达到最大铺展直径时的动能总小于 $\theta<90^\circ$ 的,表明液滴向下铺展过程中会有更多的动能转换为其他能量。此时,液滴的水平速度分量会

使液滴在撞击过程中向悬臂梁固定端移动,在相同法向分量的作用下,悬臂梁近固定端的刚度更大,变形量更小,因此动能更多地转换成了表面能,导致液滴在 $\theta\geq 90^\circ$ 时的铺展系数相较于 $\theta<90^\circ$ 的更大。

进一步观察图 15 发现,在低法向韦伯数和高法向韦伯数时,液滴撞击角度对铺展系数的影响均较小。法向韦伯数较低时,液滴与悬臂梁的相互作用较弱,因此液滴的法向动能在总动能中所占比例较小,即液滴动能只有少部分转换为液滴表面能与悬臂梁变形能,因此即使 $\theta=160^\circ$ 与 $\theta=20^\circ$ 时的液滴在悬臂梁上重心投影点的相对距离较远,但它们的铺展系数相近。法向韦伯数较高时,液滴水平速度分量较小, $\theta=100^\circ$ 与 $\theta=80^\circ$ 时的液滴重心投影点相对于初始撞击点的偏移量均较小,所对应的悬臂梁变形区别不大,因此 $\theta=100^\circ$ 与 $\theta=80^\circ$ 时液滴的铺展系数相近。

定义无量纲挠度 δ^* 的表达式

$$\delta^* = \delta_{\max}/H \tag{29}$$

式中: H 为悬臂梁厚度。

图 16 展示了悬臂梁无量纲挠度随法向韦伯数的变化曲线。由图可见,悬臂梁的挠度随法向韦伯数增大而增大。法向韦伯数相同时,液滴在 $\theta<90^\circ$ 时的悬臂梁挠度大于 $\theta\geq 90^\circ$ 的,且两者间的差距随法向韦伯数增大而减小,这是因为当 $\theta<90^\circ$ 时,液滴在悬臂梁上的重心投影点会偏向于悬臂梁自由端,

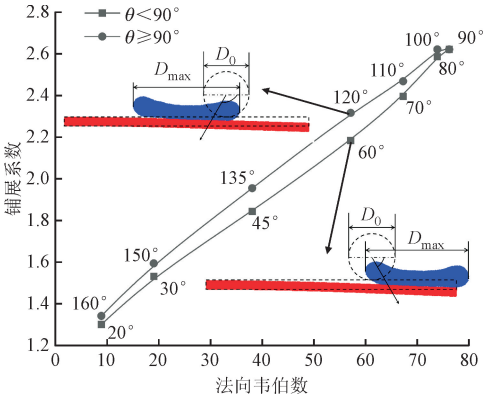


图 15 铺展系数随法向韦伯数的变化

Fig. 15 Variation of the spreading coefficient with the normal Weber number

且近自由端的刚度更小,在相同法向韦伯数作用下的变形量更大,因此当 $\theta < 90^\circ$ 时,悬臂梁的挠度更大。 $\theta = 160^\circ$ 和 $\theta = 20^\circ$ 时,液滴重心沿速度方向在悬臂梁上的投影相对距离最远,因此在液滴撞击悬臂梁的过程中,液滴会以更大的趋势向悬臂梁两端移动,且当法向韦伯数相同时,悬臂梁近自由端的变形量小而近固定端的变形量大,故而当 $\theta = 160^\circ$ 和 $\theta = 20^\circ$ 时,悬臂梁的挠度差距最大。

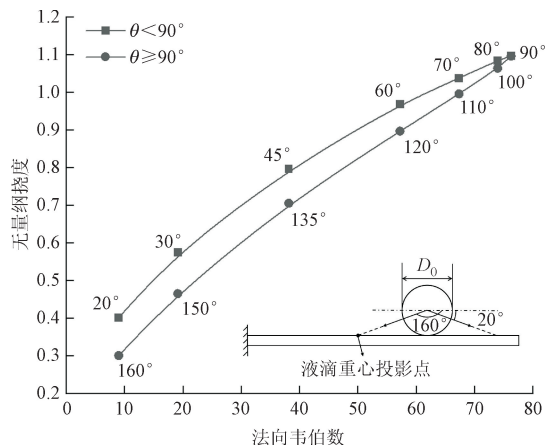


图 16 悬臂梁无量纲挠度随法向韦伯数的变化

Fig. 16 Variation of the non-dimensional deflection of the cantilever beam with the normal Weber number

图 17 给出了不同撞击角度下,悬臂梁末端偏移量随时间的变化曲线。可以看到,由于撞击悬臂梁的角度不同,导致液滴重心投影点的位置不同,在 $30^\circ \sim 80^\circ$ 范围内,悬臂梁的振动周期随撞击角度的增加而减小。

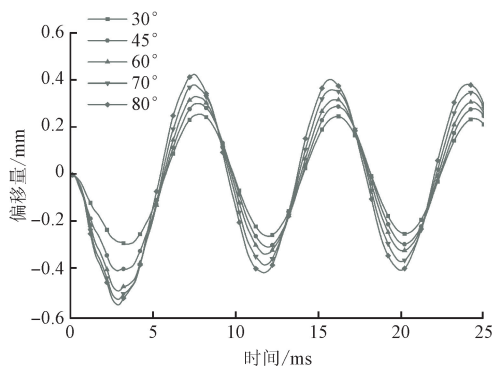


图 17 不同撞击角度下悬臂梁末端偏移量随时间的变化

Fig. 17 Variation of end displacement of the cantilever beam with time under different impact angles

4 结 论

本文提出了一种耦合移动粒子半隐式法(MPS)与离散单元法(DEM)的全拉格朗日液滴-弹

性体相互作用数值研究方法,该方法对于以惯性、表面张力和弹性为主的液滴撞击动力学问题具有良好的适用性,能够成功模拟跳板效应、液滴铺展和回弹以及板变形和振动等非线性现象。在本文研究的参数范围内,通过分析液滴以不同速度与角度撞击弹性超疏水悬臂梁的模拟结果,得到以下结论。

(1)悬臂梁的固有特性决定了当液滴以不同速度撞击悬臂梁时,其振动频率不会发生变化,但悬臂梁末端的最大偏移量会随着撞击速度的增大呈线性增加。

(2)液滴以不同角度撞击悬臂梁时,会出现与液滴垂直撞击弹性壁面类似的弹跳现象,但液滴的接触时间不随撞击角度单调变化,而是与液滴和悬臂梁达到最大变形时的相对位置有关。在撞击角度 $\theta > 90^\circ$ 时,接触时间随撞击角度的增加呈先减小再增加然后再减小的趋势;当撞击角度 $\theta < 90^\circ$ 时,接触时间随撞击角度的增加呈先增大后减小的趋势。

(3)液滴以不同角度撞击悬臂梁时,液滴重心投影点相对初始撞击点的偏移是影响液滴铺展系数和悬臂梁最大偏移量的主要因素。铺展系数和悬臂梁的最大偏移量随法向韦伯数的增大单调递增,且在相同的法向韦伯数下,液滴在 $\theta \geq 90^\circ$ 时的铺展系数始终大于 $\theta < 90^\circ$ 的; $\theta < 90^\circ$ 时悬臂梁的最大偏移量始终大于 $\theta \geq 90^\circ$ 的,两者的差距随法向韦伯数的增大而减小。

参考文献:

- [1] CAO Yihua, WU Zhenlong, SU Yuan, et al. Aircraft flight characteristics in icing conditions [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2015, 74: 62-80.
- [2] LAMRAOUI F, FORTIN G, BENOIT R, et al. Atmospheric icing impact on wind turbine production [J]. Cold Regions Science and Technology, 2014, 100: 36-49.
- [3] NISHIMOTO S, BHUSHAN B. Bioinspired self-cleaning surfaces with superhydrophobicity, superoleophobicity, and superhydrophilicity [J]. RSC Advances, 2013, 3 (3): 671-690.
- [4] PARK B K, KIM D, JEONG S, et al. Direct writing of copper conductive patterns by ink-jet printing [J]. Thin Solid Films, 2007, 515(19): 7706-7711.
- [5] MA Tianyu, CHEN Dawei, SUN Haiquan, et al. Dynamic behavior of metal droplet impact on dry smooth wall: SPH simulation and splash criteria [J]. European Journal of Mechanics: B/Fluids, 2021, 88: 123-134.
- [6] JAFERNIK H. The safety of unmanned aerial vehicle (UAV) missions in storm and precipitation areas [J].

- Safety & Fire Technology, 2019, 54(2): 194-204.
- [7] BERGERON V, BONN D, MARTIN J Y, et al. Controlling droplet deposition with polymer additives [J]. Nature, 2000, 405(6788): 772-775.
- [8] HA N S, TRUONG Q T, GOO N S, et al. Relationship between wingbeat frequency and resonant frequency of the wing in insects [J]. Bioinspiration & Biomimetics, 2013, 8(4): 046008.
- [9] HELSETH L E, WEN H Z. Evaluation of the energy generation potential of rain cells [J]. Energy, 2017, 119: 472-482.
- [10] VASILEIOU T, GERBER J, PRAUTZSCH J, et al. Superhydrophobicity enhancement through substrate flexibility [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2016, 113(47): 13307-13312.
- [11] GART S, MATES J E, MEGARIDIS C M, et al. Droplet impacting a cantilever: a leaf-raindrop system [J]. Physical Review Applied, 2015, 3(4): 044019.
- [12] UPADHYAY G, KUMAR V, BHARDWAJ R. Bouncing droplets on an elastic, superhydrophobic cantilever beam [J]. Physics of Fluids, 2021, 33(4): 042104.
- [13] ANTONINI C, VILLA F, MARENGO M. Oblique impacts of water drops onto hydrophobic and superhydrophobic surfaces: outcomes, timing, and rebound maps [J]. Experiments in Fluids, 2014, 55(4): 1713.
- [14] ABOUD D G K, WOOD M J, KIETZIG A M. Influence of liquid properties on the oblique splashing threshold of drops [J]. Physics of Fluids, 2020, 32(6): 061402.
- [15] YIN Cuicui, WANG Tianyou, CHE Zhizhao, et al. Oblique impact of droplets on microstructured superhydrophobic surfaces [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 123: 693-704.
- [16] TANGUY S, BERLEMONT A. Application of a level set method for simulation of droplet collisions [J]. International Journal of Multiphase Flow, 2005, 31(9): 1015-1035.
- [17] KAGAWA Y, ISHIGAMI T, HAYASHI K, et al. Permeation of concentrated oil-in-water emulsions through a membrane pore: numerical simulation using a coupled level set and the volume-of-fluid method [J]. Soft Matter, 2014, 10(40): 7985-7992.
- [18] KAWAKAMI K, KITA Y, YAMAMOTO Y. Front-tracking simulation of the wetting behavior of an impinging droplet using a relaxed impermeability condition and a generalized Navier boundary condition [J]. Computers & Fluids, 2023, 251: 105739.
- [19] DONG Xiangwei, HUANG Xiaoping, LIU Jianlin. Modeling and simulation of droplet impact on elastic beams based on SPH [J]. European Journal of Mechanics: A/Solids, 2019, 75: 237-257.
- [20] KOSHIZUKA S, OKA Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid [J]. Nuclear Science and Engineering, 1996, 123(3): 421-434.
- [21] TANAKA M, MASUNAGA T. Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by quasi-compressibility [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(11): 4279-4290.
- [22] CHEN Xiao, XI Guang, SUN Zhongguo. Improving stability of MPS method by a computational scheme based on conceptual particles [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 278: 254-271.
- [23] CUNDALL P A, STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies [J]. Géotechnique, 1979, 29(1): 47-65.
- [24] 孙一颢, 席光, 孙中国. MPS-DEM 耦合方法的多段系泊浮体波浪响应分析 [J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(7): 8-15.
SUN Yijie, XI Guang, SUN Zhongguo. Wave response of moored multibody platforms based on MPS-DEM method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(7): 8-15.
- [25] POTYONDY D O, CUNDALL P A. A bonded-particle model for rock [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, 41(8): 1329-1364.
- [26] KONDO M, KOSHIZUKA S, SUZUKI K, et al. Surface tension model using inter-particle force in particle method [C]//ASME/JSME 2007 5th Joint Fluids Engineering Conference. New York, USA: ASME, 2007: 93-98.
- [27] 刘启新, 孙中国, 席光. 基于 MPS 法对亲/疏水孔隙流通特性的研究 [J]. 工程热物理学报, 2020, 41(4): 860-864.
LIU Qixin, SUN Zhongguo, XI Guang. Characteristic study on the liquid flowing through a hydrophobic/hydrophilic pore using MPS method [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2020, 41(4): 860-864.
- [28] 陈啸, 孙中国, 席光. 表面自由能模型的改进及液滴浸润数值研究 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(7): 115-121.
CHEN Xiao, SUN Zhongguo, XI Guang. Improve-

- ment of surface tension model and numerical investigation on droplet wetting effect [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(7): 115-121.
- [29] RAFIEE A, THIAGARAJAN K P. An SPH projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(33/36): 2785-2795.
- [30] HWANG S C, KHAYYER A, GOTOH H, et al. Development of a fully Lagrangian MPS-based coupled method for simulation of fluid-structure interaction problems [J]. Journal of Fluids and Structures, 2014, 50: 497-511.
- [31] ANTOCI C, GALLATI M, SIBILLA S. Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH [J]. Computers & Structures, 2007, 85(11/14): 879-890.
- [32] GRAY J P, MONAGHAN J J, SWIFT R P. SPH elastic dynamics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(49/50): 6641-6662.
- [33] WEISENSEE P B, TIAN Junjiao, MILJKOVIC N, et al. Water droplet impact on elastic superhydrophobic surfaces [J]. Scientific Reports, 2016, 6(1): 30328.
- [34] RICHARD D, CLANET C, QUÉRÉ D. Surface phenomena: contact time of a bouncing drop [J]. Nature, 2002, 417(6891): 811.
- [35] SOTO D, DE LARIVIÈRE A B, BOUTILLON X, et al. The force of impacting rain [J]. Soft Matter, 2014, 10(27): 4929-4934.

(编辑 李慧敏)